

Series SSR

Code No. **65/2**
कोड नं.

- Please check that this question paper contains 8 printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains 29 questions.
- Please write down the serial number of the question before attempting it.
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 8 हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं ।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।

MATHEMATICS

गणित

Time allowed : 3 hours

निर्धारित समय : 3 घण्टे

Maximum Marks : 100

अधिकतम अंक : 100

General Instructions :

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) The question paper consists of 29 questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of 10 questions of one mark each, Section B comprises of 12 questions of four marks each and Section C comprises of 7 questions of six marks each.
- (iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.
- (iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.
- (v) Use of calculators is **not** permitted.

सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में 10 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है । खण्ड ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है । खण्ड स में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है ।

- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है ।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

SECTION A

खण्ड अ

1. If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$, find a unit vector in the direction of $\vec{a} - \vec{b}$.

यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$, तो $\vec{a} - \vec{b}$ की दिशा में मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए ।

2. If $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, find the angle between \vec{a} and \vec{b} .

यदि $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, तो \vec{a} तथा \vec{b} के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

3. If $\vec{P} (1, 5, 4)$ and $\vec{Q} (4, 1, -2)$, find the direction ratios of \vec{PQ} .

यदि $\vec{P} (1, 5, 4)$ तथा $\vec{Q} (4, 1, -2)$, तो \vec{PQ} के दिक् अनुपात ज्ञात कीजिए ।

4. Let * be a binary operation defined by $a * b = 2a + b - 3$. Find $3 * 4$.

मान लीजिए * एक द्विआधारी संक्रिया इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = 2a + b - 3$, तो $3 * 4$ ज्ञात कीजिए ।

5. Using principal value, evaluate the following :

$$\cos^{-1} \left(\cos \frac{2\pi}{3} \right) + \sin^{-1} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

मुख्य मान का प्रयोग कर निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\cos^{-1} \left(\cos \frac{2\pi}{3} \right) + \sin^{-1} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

6. For what value of x, is the following matrix singular ?

$$\begin{bmatrix} 3 - 2x & x + 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

x के किस मान के लिए निम्न आव्यूह अव्युत्क्रमणीय है ?

$$\begin{bmatrix} 3 - 2x & x + 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है ।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

SECTION A

खण्ड अ

1. If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$, find a unit vector in the direction of $\vec{a} - \vec{b}$.

यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$, तो $\vec{a} - \vec{b}$ की दिशा में मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए ।

2. If $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, find the angle between \vec{a} and \vec{b} .

यदि $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, तो \vec{a} तथा \vec{b} के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

3. If $\vec{P} (1, 5, 4)$ and $\vec{Q} (4, 1, -2)$, find the direction ratios of \vec{PQ} .

यदि $\vec{P} (1, 5, 4)$ तथा $\vec{Q} (4, 1, -2)$, तो \vec{PQ} के दिक् अनुपात ज्ञात कीजिए ।

4. Let * be a binary operation defined by $a * b = 2a + b - 3$. Find $3 * 4$.

मान लीजिए * एक द्विआधारी संक्रिया इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = 2a + b - 3$, तो $3 * 4$ ज्ञात कीजिए ।

5. Using principal value, evaluate the following :

$$\cos^{-1} \left(\cos \frac{2\pi}{3} \right) + \sin^{-1} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

मुख्य मान का प्रयोग कर निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\cos^{-1} \left(\cos \frac{2\pi}{3} \right) + \sin^{-1} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

6. For what value of x, is the following matrix singular ?

$$\begin{bmatrix} 3-2x & x+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

x के किस मान के लिए निम्न आव्यूह अव्युत्क्रमणीय है ?

$$\begin{bmatrix} 3-2x & x+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Evaluate :

$$\begin{vmatrix} \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{vmatrix}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{vmatrix} \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{vmatrix}$$

8. A matrix A, of order 3×3 , has determinant 4. Find the value of $|3A|$.

एक आव्यूह A, जिसकी कोटि 3×3 है, के सारणिक का मान 4 है। $|3A|$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. Evaluate :

$$\int \frac{2 \cos x}{3 \sin^2 x} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2 \cos x}{3 \sin^2 x} dx$$

10. Evaluate :

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$$

SECTION B

खण्ड ब

11. 12 cards, numbered 1 to 12, are placed in a box, mixed up thoroughly and then a card is drawn at random from the box. If it is known that the number on the drawn card is more than 3, find the probability that it is an even number.

एक बक्से में 12 कार्ड, जिन पर 1 से 12 तक पूर्णांक लिखे गए हैं, रख कर अच्छी प्रकार से मिलाए गए हैं तथा इस बक्से से यादृच्छया एक कार्ड निकाला गया है। यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गए कार्ड पर 3 से बड़ी संख्या है, तो इस संख्या के सम संख्या होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

12. If vectors \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} are such that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ and $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ and $|\vec{c}| = 7$, find the angle between \vec{a} and \vec{b} .

यदि सदिश \vec{a} , \vec{b} तथा \vec{c} ऐसे हैं कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ तथा $|\vec{c}| = 7$, तो \vec{a} तथा \vec{b} के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

13. Solve the following differential equation :

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy$$

Given that $y = 1$, when $x = 1$.

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy$$

दिया गया है कि जब $x = 1$, तो $y = 1$ है ।

14. Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

OR

Evaluate :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$$

15. If $f(x)$, defined by the following, is continuous at $x = 0$, find the values of a , b and c .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(a+1)x + \sin x}{x}, & \text{if } x < 0 \\ c, & \text{if } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+bx^2} - \sqrt{x}}{bx^{3/2}}, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

यदि फलन $f(x)$, जो निम्न द्वारा परिभाषित है, $x = 0$ पर सतत है, तो a, b तथा c के मान ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(a+1)x + \sin x}{x}, & \text{यदि } x < 0 \\ c, & \text{यदि } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+bx^2} - \sqrt{x}}{bx^{3/2}}, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

16. Show that the relation R defined by $(a, b) R (c, d) \Rightarrow a + d = b + c$ on the set $N \times N$ is an equivalence relation.

दर्शाइए कि समुच्चय $N \times N$ पर परिभाषित सम्बन्ध $(a, b) R (c, d) \Rightarrow a + d = b + c$ एक तुल्यता सम्बन्ध है ।

17. Prove the following :

$$\tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{7} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{4}$$

OR

Solve for x :

$$\tan^{-1} \left(\frac{x-1}{x-2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{7} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{4}$$

अथवा

x के लिए हल कीजिए :

$$\tan^{-1} \left(\frac{x-1}{x-2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

18. If $y = \sin^{-1} \left[\frac{5x+12\sqrt{1-x^2}}{13} \right]$, find $\frac{dy}{dx}$.

OR

If $x = a(\cos \theta + \log \tan \frac{\theta}{2})$ and $y = a \sin \theta$, find the value of $\frac{dy}{dx}$ at $\theta = \frac{\pi}{4}$.

यदि $y = \sin^{-1} \left[\frac{5x+12\sqrt{1-x^2}}{13} \right]$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $x = a(\cos \theta + \log \tan \frac{\theta}{2})$ तथा $y = a \sin \theta$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर ज्ञात कीजिए ।

19. Find the intervals in which the function $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15$ is (i) increasing and (ii) decreasing.

OR

At what points will the tangent to the curve $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 21$ be parallel to x-axis ? Also, find the equations of tangents to the curve at those points.

फलन $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15$ के लिए वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जहाँ फलन (i) वर्धमान है तथा (ii) हासमान है ।

अथवा

वक्र $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 21$ के किस बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है ? उन बिन्दुओं पर वक्र की स्पर्श रेखाओं के समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

20. Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

21. Find the coordinates of the point where the line $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$ meets the plane $x + y + 4z = 6$.

उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ रेखा $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$ तल $x + y + 4z = 6$ को प्रतिच्छेद करती है ।

22. Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$$

SECTION C

खण्ड स

23. Show that the semi-vertical angle of the cone of maximum volume and of given slant height is $\tan^{-1}\sqrt{2}$.

OR

Show that the volume of the greatest cylinder that can be inscribed in a cone of height h and semi-vertical angle α is $\frac{4}{27} \pi h^3 \tan^2 \alpha$.

दर्शाइए कि अधिकतम आयतन तथा दी गई तिर्यक ऊँचाई वाले शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होगा ।

अथवा

दर्शाइए कि h ऊँचाई तथा अर्धशीर्ष कोण α वाले शंकु के अन्तर्गत निर्मित अधिकतम आयतन वाले बेलन का आयतन $\frac{4}{27} \pi h^3 \tan^2 \alpha$ है ।

24. Using matrices, solve the following system of linear equations :

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$3x - 3y - 4z = 11$$

OR

Using elementary transformations, find the inverse of the following matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

आव्यूहों का प्रयोग करके निम्न रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$3x - 3y - 4z = 11$$

अथवा

प्रारंभिक रूपांतरणों के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

SECTION C

खण्ड स

23. Show that the semi-vertical angle of the cone of maximum volume and of given slant height is $\tan^{-1}\sqrt{2}$.

OR

Show that the volume of the greatest cylinder that can be inscribed in a cone of height h and semi-vertical angle α is $\frac{4}{27} \pi h^3 \tan^2 \alpha$.

दर्शाइए कि अधिकतम आयतन तथा दी गई तिर्यक ऊँचाई वाले शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होगा ।

अथवा

दर्शाइए कि h ऊँचाई तथा अर्धशीर्ष कोण α वाले शंकु के अन्तर्गत निर्मित अधिकतम आयतन वाले बेलन का आयतन $\frac{4}{27} \pi h^3 \tan^2 \alpha$ है ।

24. Using matrices, solve the following system of linear equations :

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$3x - 3y - 4z = 11$$

OR

Using elementary transformations, find the inverse of the following matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

आव्यूहों का प्रयोग करके निम्न रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$3x - 3y - 4z = 11$$

अथवा

प्रारंभिक रूपांतरणों के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

25. A diet for a sick person must contain at least 4000 units of vitamins, 50 units of minerals and 1400 units of calories. Two foods A and B are available at a cost of Rs. 5 and Rs. 4 per unit respectively. One unit of the food A contains 200 units of vitamins, 1 unit of minerals and 40 units of calories, while one unit of the food B contains 100 units of vitamins, 2 units of minerals and 40 units of calories. Find what combination of the foods A and B should be used to have least cost, but it must satisfy the requirements of the sick person. Form the question as LPP and solve it graphically.

एक रोगी के भोजन में कम-से-कम 4000 इकाई विटामिन्स, 50 इकाई खनिज पदार्थ और 1400 इकाई कैलोरी होना अनिवार्य है। A और B दो प्रकार के भोजन सुलभ हैं जो क्रमशः 5 रु. और 4 रु. प्रति इकाई की दर से मिलते हैं। भोजन A की प्रति इकाई में 200 इकाई विटामिन्स, 1 इकाई खनिज पदार्थ तथा 40 इकाई कैलोरी हैं, जबकि भोजन B की प्रति इकाई में 100 इकाई विटामिन्स, 2 इकाई खनिज पदार्थ तथा 40 इकाई कैलोरी हैं। उस रोगी की आवश्यकताओं की पूर्ति हेतु भोजन A और B को कितना-कितना मिलाया जाए कि न्यूनतम व्यय पड़े, ज्ञात कीजिए। प्रश्न को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर आलेख की विधि से हल कीजिए।

26. In a bulb factory, machines A, B and C manufacture 60%, 30% and 10% bulbs respectively. 1%, 2% and 3% of the bulbs produced respectively by A, B and C are found to be defective. A bulb is picked up at random from the total production and found to be defective. Find the probability that this bulb was produced by the machine A.

एक बल्ब के कारखाने में मशीनों A, B और C द्वारा क्रमशः 60%, 30% और 10% बल्बों को तैयार किया जाता है। मशीनों A, B और C द्वारा उत्पादित बल्बों में से क्रमशः 1%, 2% और 3% बल्ब दोषपूर्ण पाए जाते हैं। सम्पूर्ण तैयार बल्बों में से एक बल्ब यादृच्छया चुनने पर वह दोषपूर्ण पाया गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह बल्ब मशीन A द्वारा निर्मित हुआ था।

27. Evaluate :

$$\int_0^a \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^a \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx$$

28. Find the area lying above the x-axis and included between the circle $x^2 + y^2 = 8x$ and the parabola $y^2 = 4x$.

x-अक्ष के ऊपर तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 8x$ और परवलय $y^2 = 4x$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

29. Find the distance of the point $(-2, 3, -4)$ from the line $\frac{x+2}{3} = \frac{2y+3}{4} = \frac{3z+4}{5}$, measured parallel to the plane $4x + 12y - 3z + 1 = 0$.

बिन्दु $(-2, 3, -4)$ की रेखा $\frac{x+2}{3} = \frac{2y+3}{4} = \frac{3z+4}{5}$ से तल $4x + 12y - 3z + 1 = 0$ के समान्तर दूरी ज्ञात कीजिए।